Lois de Kepler
Trajectoire de Mercure – Masse du soleil

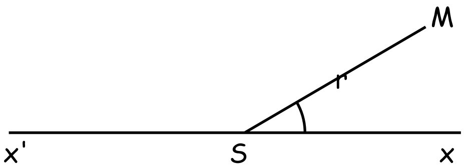
1- Objectifs

Les objectifs de ce travail sont de:
- Etudier le mouvement de Mercure par rapport au soleil.
- Retrouver les trois lois de Képler.

2- La première loi de Képler

2-1- Etude de la trajectoire

Le tracé de l'orbite de la planète Mercure permet d'étudier les lois de Kepler et celle de la gravitation due à Newton.



Tracer au milieu d'une feuille de format A4 une ligne x'x dans le sens de la largeur et placer S (le Soleil) au centre de la feuille (figure ci-contre). On prendra comme échelle: 18cm pour 1ua (1ua=$1,5.10^{11}$m).

Placer les positions successives de Mercure (point M) grâce aux valeurs figurant dans le tableau ci-dessous avec r=SM (distance entre le Soleil et Mercure en unité astronomique) et θ=(Sx, SM) (anomalie vraie de Mercure).

Indice	Date	Angle θ (degré)	Distance r (ua)	Vitesse V $km.s^{-1}$
1	20/07/1995	0	0,307	58,9
2	25/07/1995	31	0,315	57,8
3	30/07/1995	60	0,336	54,6
4	04/08/1995	85	0,363	50,9
5	09/08/1995	106	0,392	47,3
6	14/08/1995	124	0,418	44,2
7	19/08/1995	140	0,440	41,7
8	24/08/1995	155	0,455	40,1
9	29/08/1995	169	0,464	39,1
10	03/09/1995	183	0,467	38,8
11	08/09/1995	197	0,462	39,3
12	13/09/1995	211	0,450	40,6
13	18/09/1995	227	0,432	42,6
14	23/09/1995	244	0,408	45,4
15	28/09/1995	263	0,381	48,6
16	03/10/1995	286	0,352	52,4
17	08/10/1995	312	0,326	56,1
18	13/10/1995	342	0,310	58,6

2-2- Nature de la trajectoire

Repérer le point P (périhélie) qui correspond à la position de Mercure la plus proche du Soleil (c'est le point de départ de la construction).

Repérer le point A (aphélie) qui correspond à la position de Mercure la plus éloignée du Soleil.

Placer le point O milieu de PA, et le point S' (foyer) symétrique de S (foyer) par rapport à O.

Mesurer les distances PA (grand axe) et OS:

PA = 2a = 13,7 cm
OS = c = 1,4 cm

Choisir les trois points M_i (i=2, 8 et 13) de la trajectoire.

Mesurer les distances SM_i et $S'M_i$ et faire la somme $SM_i + S'M_i$.

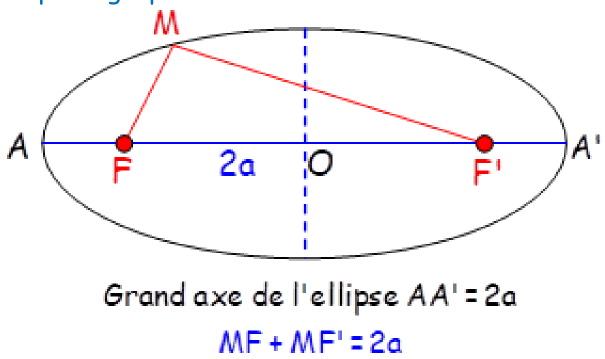
Point i	SM_i (cm)	$S'M_i$ (cm)	$SM_i + S'M_i$ (cm)
2	5,6	8,2	13,8
8	8,1	5,7	13,8
13	7,7	6,1	13,8

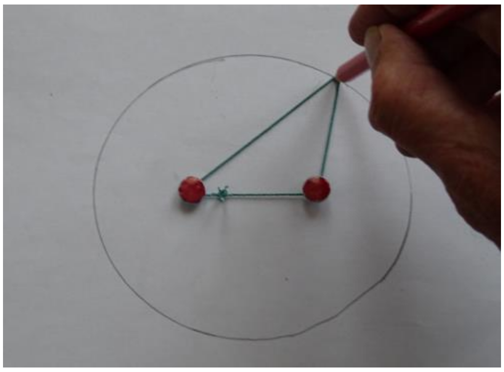
Que peut-on dire de la somme $SM_i + S'M_i$?

La somme est constante: $SM_i + S'M_i = Cte$

En déduire une méthode pratique et rapide utilisant une ficelle, 2 punaises et un crayon pour tracer la trajectoire.

La photographie ci-dessous donne la méthode afin de construire une ellipse.





Conclure.

$1^{ère}$ loi de Kepler - Loi des orbites

Dans le référentiel héliocentrique, le centre de chaque planète décrit une trajectoire elliptique dont le Soleil S est l'un des foyers.

3- La seconde loi de Képler

Repérer les positions du point S et celles de Mercure pour les indices 1, 3, 8, 10, 13 et 15.

Hachurer les surfaces S_{1-3}, S_{8-10} et S_{13-15}.

En combien de temps la planète Mercure parcoure ces trois secteurs?

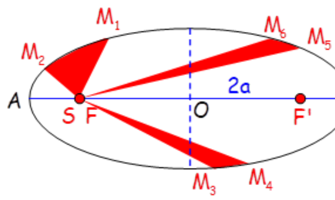
Δt_{1-3} = 10 jours Δt_{8-10} = 10 jours Δt_{13-15} = 10 jours

Evaluer ces surfaces en utilisant la formule de l'aire d'un secteur: $S=\pi.r^2.\frac{\Delta\theta}{360}$, où r est le rayon moyen du secteur et $\Delta\theta$ son angle.

Secteurs	Δt (jours)	r (cm)	$\Delta\theta$ (degré)	S (cm^2)
1-3	Δt_{1-3} = 10	r_2 = 5,55	$\Delta\theta_{1-3}$ = 60	S_{1-3} = 16,2
8-10	Δt_{8-10} = 10	r_9 = 8,15	$\Delta\theta_{8-10}$ = 28	S_{8-10} = 16,2
13-15	Δt_{13-15} = 10	r_{14} = 7,20	$\Delta\theta_{13-15}$ = 36	S_{13-15}= 16,3

Que peut-on dire de la surface S?

La surface S est constante: S = Cte



Grand axe de l'ellipse AA' =2a
MF + MF' = 2a

Conclure.

2ème loi de Kepler - Loi des aires

Dans le référentiel héliocentrique, le segment de droite qui relie les centres du Soleil S et de la planète M "balaie" des aires égales pendant des durées égales

4- Etude dynamique et évaluation de la masse du soleil

4-1- Détermination et tracé des vecteurs accélération

On veut déterminer la valeur de l'accélération du centre d'inertie de la planète Mercure pour les positions 2, 9 et 14.

Pour cela, on utilisera une méthode vue lors d'un précédent TP, pour déterminer la valeur ΔV de la variation du vecteur vitesse en un point donné, puis pour en déduire une évaluation de la valeur de l'accélération a.

Expliquer brièvement la méthode utilisée.

Pour maitriser la méthode revoir le cours sur les tracés des vecteurs vitesse d'un mouvement circulaire puis de la variation du vecteur vitesse. En divisant cette variation ΔV par la durée Δt on obtient l'accélération A.

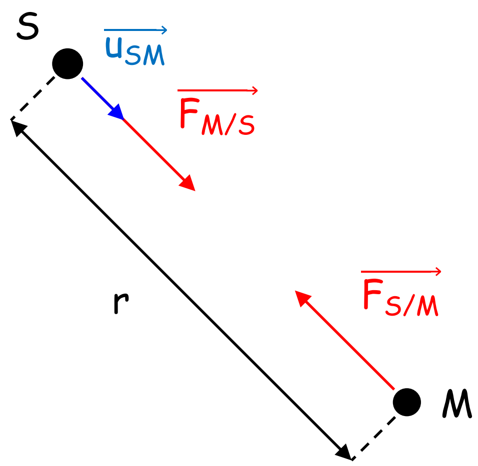
On prendra comme échelle pour les vitesses 1,0cm pour 10km.s^{-1}.

Compléter le tableau ci dessous.

Position	Δt (s)	ΔV (m.s^{-1})	a (m.s^{-2})	r (m)	a.r^2 (m^3.s^{-2})
2	864 000	50,9	$5{,}90.10^{-2}$	$4{,}72.10^{10}$	$1.33.10^{20}$
9	864 000	23,3	$2{,}70.10^{-2}$	$6{,}96.10^{10}$	$1.33.10^{20}$
14	864 000	31,1	$3{,}6.10^{-2}$	$6{,}12.10^{10}$	$1.33.10^{20}$

4-2- Exploitation des résultats

En supposant que la planète Mercure n'est soumise qu'à l'attraction du Soleil, donner l'expression vectorielle de la force de gravitation au point M_i. On notera G (G=6,67.10^{-11}si) la constante de gravitation universelle. La masse du soleil sera notée M_S et celle de Mercure M_M.



$$\overrightarrow{F_{S/M}} = -\overrightarrow{F_{M/S}} = -G.\frac{M_S.M_M}{r^2}.\overrightarrow{u_{SM}} = M_M.\vec{a}$$

Comparer la direction et le sens du vecteur force ainsi que ceux du vecteur accélération.

Les sens des vecteurs force et accélération sont identiques.

Comment varie la valeur du vecteur accélération au cours du mouvement de la planète?

Le vecteur accélération est toujours dirigé vers S et sa valeur diminue lorsque la distance r = SM augmente.

Cette variation est-elle en accord avec la deuxième loi de Newton?

Cette variation satisfait pleinement la 2nde loi de Newton.

En conclusion, que peut-on dire du référentiel héliocentrique?

Le référentiel héliocentrique est un référentiel galiléen, puisque les lois de Newton se vérifient dans celui-ci.

4-3- Evaluation de la masse du soleil

Calculer les produits a.r^2 pour les trois positions de Mercure pour les positions.

.Les produits sont calculés dans le tableau précédent.

Que peut-on dire de ces produits ar^2?

On peut constater que les produits sont constants: ar^2 = Cte.

En utilisant la deuxième loi de Newton, donner l'expression littérale de ce produit en fonction de la masse M_S du Soleil et de la constante de gravitation G.

D'après la relation vectorielle: $\overrightarrow{F_{S/M}} = -\overrightarrow{F_{M/S}} = -G.\frac{M_S.M_M}{r^2}.\overrightarrow{u_{SM}} = M_M.\vec{a}$

On en déduit la relation algébrique: $F_{S/M} = F_{M/S} = -G.\frac{M_S.M_M}{r^2} = M_M.a$

D'où: $a.r^2 = G.M_S$

Donner un ordre de grandeur de la masse du Soleil.

On aura: $M_S = \frac{a.r^2}{G} = \frac{1,33.10^{20}}{6,67.10^{11}} = 1,99.10^{30}$ kg

5- La troisième loi de Képler

On utilisera les mêmes informations que Kepler concernant les planètes (leur distance moyenne au Soleil, leur période de révolution).

Toutefois, on effectuera notre recherche sur toutes les planètes du système solaire alors que six seulement étaient connues à l'époque de Kepler, Uranus et Neptune ayant été découvertes beaucoup plus tard.

Planète	T (année)	T (s)	T^2 (s^2)	a (ua)	a (m)	a^3 (m^3)
Mercure	0,240	$7,6.10^6$	$5,7.10^{13}$	0,387	$5,8.10^{10}$	$2,0.10^{32}$
Vénus	0,615	$1,9.10^7$	$3,8.10^{14}$	0,723	$1,1.10^{11}$	$1,3.10^{33}$
Terre	1,00	$3,2.10^7$	$1,0.10^{15}$	1,00	$1,5.10^{11}$	$3,4.10^{33}$
Mars	1,88	$5,9.10^7$	$3,5.10^{15}$	1,52	$2,3.10^{11}$	$1,2.10^{34}$
Jupiter	11,9	$3,8.10^8$	$1,4.10^{17}$	5,20	$7,8.10^{11}$	$4,7.10^{35}$
Saturne	39,4	$1,2.10^9$	$1,5.10^{18}$	9,51	$1,4.10^{12}$	$2,9.10^{36}$
Uranus	84,0	$2,7.10^9$	$7,0.10^{18}$	19,2	$2,9.10^{12}$	$2,4.10^{37}$
Neptune	165	$5,2.10^9$	$2,7.10^{19}$	30,0	$4,5.10^{12}$	$9,1.10^{37}$

Compléter le tableau ci-dessus. Puis tracer la courbe représentant les variations de T^2 en fonction de a^3 et la modéliser.

$$T^2 = 3,1.10^{-19}.\ a^3$$

Calculer la grandeur: $\frac{4.\pi^2}{G.M_S} = \frac{4\times 3,14}{6,67.10^{-11}\times 1,9.10^{30}} = 3,1.10^{-19}$

Conclure.

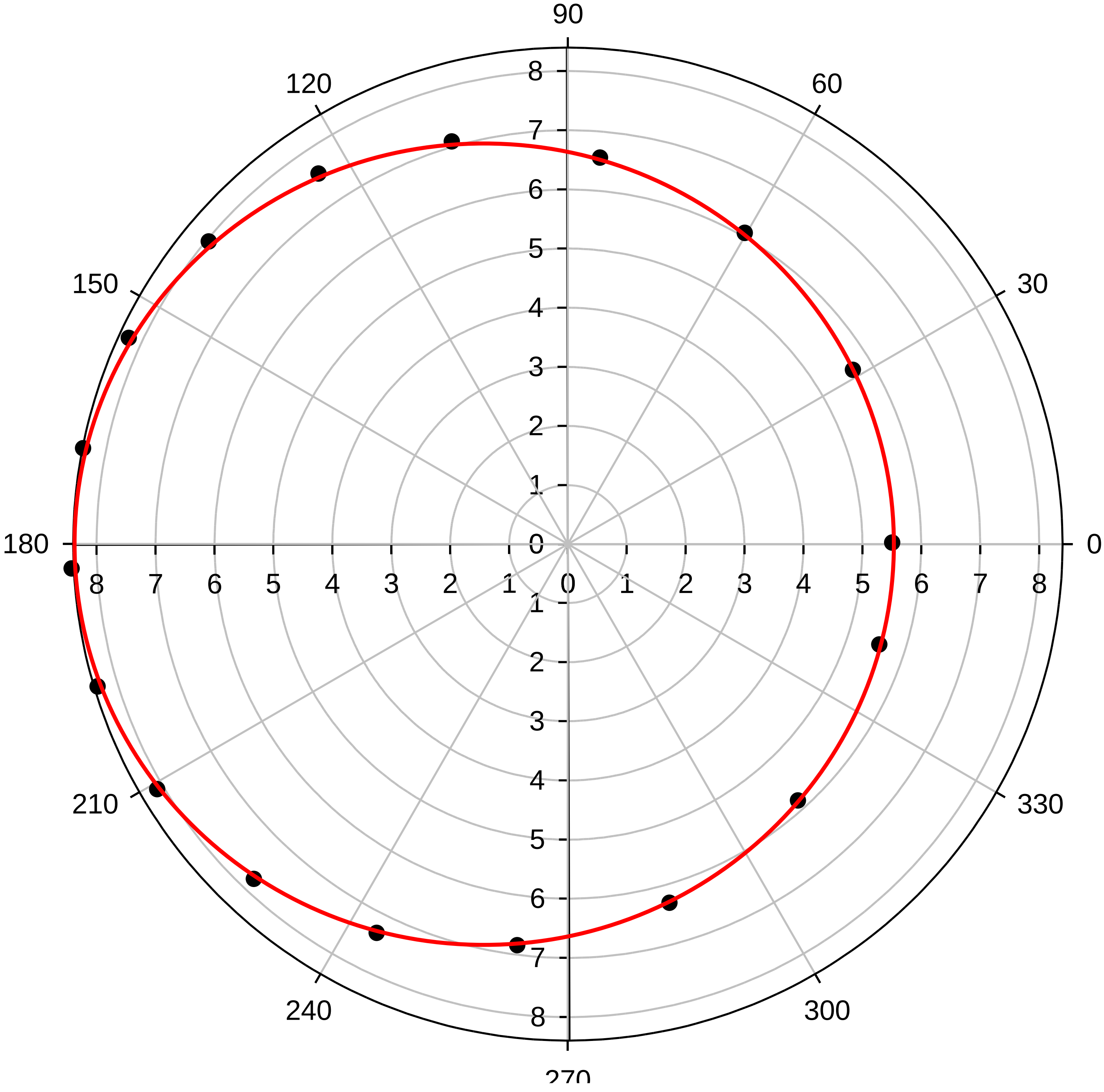
$3^{ème}$ loi de Kepler - Loi des périodes

Dans le référentiel héliocentrique, le rapport entre le carré de la période de révolution T de chaque planète et le cube du demi-grand axe a de l'orbite elliptique est constant:

$$\frac{T^2}{a^3} = K$$

Trajectoire de Mercure

(18cm pour 1ua)



Trajectoire de Mercure

(18cm pour 1ua)